

## РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная работа подводит итог изучения переходных режимов в электрических цепях и усвоения методов их анализа. Для расчета переходного процесса предлагается цепь второго порядка, в которой действуют два источника постоянных воздействий.

Предполагается, что до срабатывания коммутаторов (коммутатор работает на замыкание) цепь находилась в установившемся режиме.

Задача расчета переходных процессов сводится к решению системы дифференциальных уравнений, связывающих заданные воздействия и искомые токи и напряжения в исследуемой послекоммутационной цепи. Сформулированная задача может быть решена на основе классической теории дифференциальных уравнений (классический метод), операционного исчисления (операторный метод), численных методов (метод пространства состояний).

### 2.1. Задание

1. На откидном листе изобразить электрическую цепь, подлежащую расчету, привести численные значения параметров и задающих источников тока и напряжения.

2. Рассчитать указанный преподавателем ток или напряжение в одной из ветвей классическим методом.

3. Составить эквивалентную операторную схему и записать для нее систему уравнений по законам Кирхгофа. Рассчитать искомый ток операторным методом.

4. Построить графики изменения во времени найденных величин.

### 2.2. Выбор варианта

1. Расчетная цепь выбирается в соответствии с номером варианта с помощью табл. 2.1. Графы расчетных цепей изображены на рис. 2.1.

2. Параметры пассивных элементов цепи и задающих источников цепей во всех вариантах определяются следующим образом:

$$L = 0,5 \cdot M \text{ Гн}, \quad C = 100 \cdot N \text{ мкФ};$$

$$\begin{aligned} \text{величина сопротивлений для четных ветвей} & \quad R = 100 \cdot A_r \text{ Ом}, \\ \text{для нечетных ветвей} & \quad R = 20 \cdot (A_r + N) \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\text{параметры источников: } E_1 = 20 (N + M) \text{ В}, \quad E_2 = 20 \cdot N \text{ В}, \quad J = 0,1 (N + 2M) \text{ А},$$

где  $N$  – номер группы (для студентов заочного отделения: 1 – для студентов, обучающихся в нормативные сроки, 2 – для студентов, обучающихся в сокращенные сроки);

***M*** – шифр специальности, для АТ – 1; АСУ – 2; ЭС – 1,5; ТК – 2,5; КТЭИ – 3; АЭП (АТП) – 3,5; АТП – 4; АУЦ – 4,5; ЭВТ – 5; КРЭС – 5,5; КЗИ – 6; КСК – 6,5; ИВК – 2;

***A<sub>r</sub>*** – сумма цифр номера варианта.

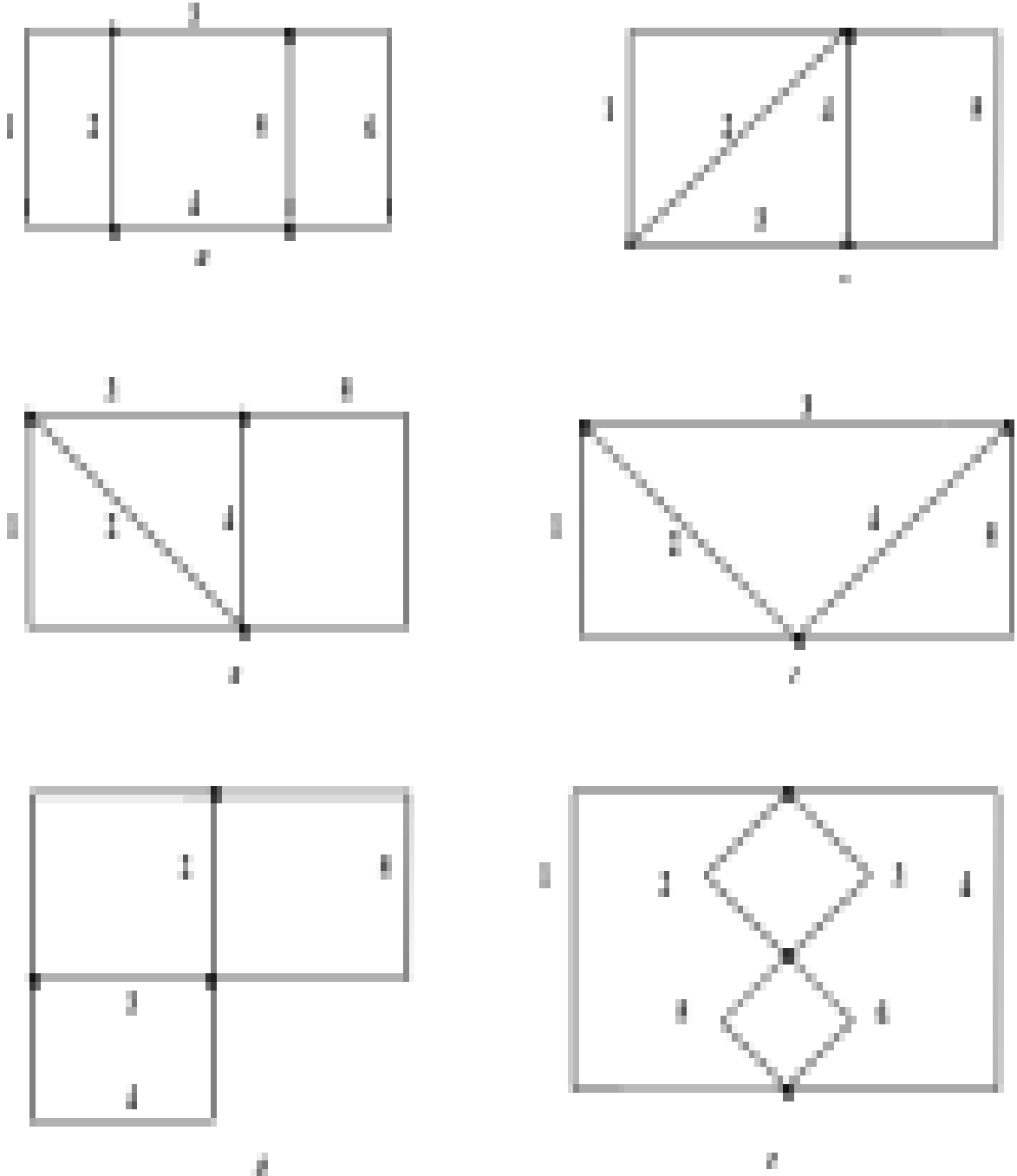


Рис. 2.1

Таблица 2.1

Вариант	Граф	Ключ	Расположение элементов в ветвях цепи					
			$E_1$	$E_2$	$J$	$R$	$L$	$C$
1, 26, 51, 76	<i>a</i>	3	1	–	6	1, 5, 4	3	2
2, 27, 52, 77	<i>б</i>	5	1	5	–	3, 4, 5	1	2
3, 28, 53, 78	<i>в</i>	2	3	–	5	1, 2, 3	3	4
4, 29, 54, 79	<i>г</i>	3	1	–	5	1, 4, 3	1	2
5, 30, 55, 80	<i>д</i>	4	1	5	–	2, 4, 5	1	3
6, 31, 56, 81	<i>е</i>	4	1	4	–	1, 3, 4, 5, 6	5	2
7, 32, 57, 82	<i>a</i>	6	6	–	1	2, 3, 5, 6	2	5
8, 33, 58, 83	<i>б</i>	2	5	3	–	1, 2, 3, 5	4	1
9, 34, 59, 84	<i>в</i>	2	1	–	4	1, 4, 5	2	5
10, 35, 60, 85	<i>г</i>	4	3	1	–	2, 3, 4, 5	5	1
11, 36, 61, 86	<i>д</i>	4	1	4	–	1, 2, 3, 4, 5	1	2
12, 37, 62, 87	<i>е</i>	6	4	–	2	3, 4, 5, 6	4	1
13, 38, 63, 88	<i>a</i>	4	1	–	6	1, 4, 5	3	2
14, 39, 64, 89	<i>б</i>	4	4	–	5	1, 4, 3	1	2
15, 40, 65, 90	<i>в</i>	5	4	5	–	1, 3, 4, 5	1	2
16, 41, 66, 91	<i>г</i>	5	5	–	2	1, 3, 4, 5	4	1
17, 42, 67, 92	<i>д</i>	4	1	4	–	1, 3, 4, 5	5	2
18, 43, 68, 93	<i>е</i>	2	3	–	1	2, 3, 4, 6	5	3
19, 44, 69, 94	<i>a</i>	6	2	5	–	1, 5, 6	1	2
20, 45, 70, 95	<i>б</i>	5	3	5	–	2, 4, 5	4	1
21, 46, 71, 96	<i>в</i>	2	4	–	5	1, 2, 3, 4	1	3
22, 47, 72, 97	<i>г</i>	5	3	–	1	2, 3, 5	3	4
23, 48, 73, 98	<i>д</i>	4	1	–	2	1, 3, 4	3	5
24, 49, 74, 99	<i>е</i>	1	6	–	4	1, 2, 3, 6	3	5
25, 50, 75, 100	<i>a</i>	5	3	–	2	1, 3, 5, 6	1	4

**Выбор искомой величины**

№ варианта	искомая величина	№ варианта	искомая величина	№ варианта	искомая величина	№ варианта	искомая величина
1	I <sub>1</sub>	26	I <sub>4</sub>	51	I <sub>5</sub>	76	I <sub>C</sub>
2	I <sub>4</sub>	27	I <sub>5</sub>	52	I <sub>C</sub>	77	I <sub>3</sub>
3	I <sub>2</sub>	28	I <sub>1</sub>	53	I <sub>C</sub>	78	U <sub>L</sub>
4	I <sub>4</sub>	29	I <sub>3</sub>	54	I <sub>C</sub>	79	U <sub>L</sub>
5	I <sub>2</sub>	30	I <sub>4</sub>	55	I <sub>5</sub>	80	I <sub>C</sub>
6	I <sub>4</sub>	31	I <sub>1</sub>	56	I <sub>5</sub>	81	I <sub>3</sub>
7	I <sub>C</sub>	32	I <sub>3</sub>	57	I <sub>6</sub>	82	U <sub>L</sub>
8	I <sub>3</sub>	33	I <sub>C</sub>	58	I <sub>2</sub>	83	I <sub>5</sub>
9	I <sub>1</sub>	34	I <sub>C</sub>	59	U <sub>L</sub>	84	U <sub>R1</sub>
10	I <sub>4</sub>	35	I <sub>C</sub>	60	I <sub>3</sub>	85	I <sub>2</sub>
11	I <sub>5</sub>	36	I <sub>C</sub>	61	I <sub>4</sub>	86	I <sub>3</sub>
12	I <sub>5</sub>	37	I <sub>C</sub>	62	U <sub>L</sub>	87	I <sub>3</sub>
13	I <sub>4</sub>	38	I <sub>5</sub>	63	I <sub>C</sub>	88	I <sub>1</sub>
14	I <sub>3</sub>	39	I <sub>4</sub>	64	U <sub>L</sub>	89	I <sub>C</sub>
15	I <sub>3</sub>	40	I <sub>5</sub>	65	U <sub>L</sub>	90	I <sub>4</sub>
16	I <sub>3</sub>	41	I <sub>C</sub>	66	I <sub>5</sub>	91	U <sub>L</sub>
17	I <sub>3</sub>	42	I <sub>4</sub>	67	I <sub>1</sub>	92	I <sub>C</sub>
18	I <sub>6</sub>	43	I <sub>2</sub>	68	I <sub>4</sub>	93	I <sub>C</sub>
19	I <sub>5</sub>	44	I <sub>6</sub>	69	I <sub>C</sub>	94	U <sub>L</sub>
20	I <sub>2</sub>	45	I <sub>5</sub>	70	I <sub>C</sub>	95	I <sub>3</sub>
21	I <sub>C</sub>	46	I <sub>4</sub>	71	I <sub>2</sub>	96	U <sub>L</sub>
22	I <sub>5</sub>	47	I <sub>2</sub>	72	I <sub>2</sub>	97	I <sub>C</sub>
23	I <sub>4</sub>	48	I <sub>1</sub>	73	I <sub>C</sub>	98	U <sub>L</sub>
24	I <sub>1</sub>	49	I <sub>2</sub>	74	I <sub>C</sub>	99	I <sub>6</sub>
25	I <sub>6</sub>	50	I <sub>5</sub>	75	I <sub>3</sub>	100	I <sub>C</sub>

### 2.3. Методические указания

#### 2.3.1. Классический метод расчета

Переходный процесс можно рассчитать классическим методом в следующей последовательности:

1. Расчет докоммутационного установившегося режима с целью получения независимых начальных условий (правил коммутации):

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

2. Составление характеристического уравнения цепи и определение его корней.

3. Запись полного решения в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

4. Расчет послекоммутационного установившегося режима с целью получения принужденных составляющих.

5. Расчет необходимых начальных условий (значение искомой величины и ее производной в момент  $t = 0_+$ ) с использованием уравнений Кирхгофа и независимых начальных условий или схем замещения в момент  $t = 0_+$ .

6. Определение постоянных интегрирования и функции, описывающей изменение искомой величины в переходном режиме.

### 2.3.2. Операторный метод расчета

При расчете переходных процессов операторным методом удобно составить предварительно *операторную схему*. В каждой ветви с параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$  должны быть при ненулевых начальных условиях учтены две дополнительные внутренние ЭДС  $Li(0)$  и  $u_C(0)/p$ . На рис. 2.2 показаны переходы от элементов с мгновенными значениями токов и напряжений к элементам операторной схемы.

Далее для операторной схемы замещения составляется система уравнений Кирхгофа в операторной форме, или ведется расчет любым другим известным расчетным методом. В результате решения должно быть получено изображение по Лапласу искомой величины, которому с применением теоремы разложения (таблиц, связывающих оригиналы и их изображения или при помощи других методов) ставится в соответствие оригинал в виде функции времени.

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1. Анализ независимых начальных условий (для этого необходимо рассчитать режим в  $t = 0^-$ ).

2. Составление эквивалентной операторной схемы.

3. Расчет операторной схемы любым расчетным методом в операторной форме, преобразование изображения  $X(p)$  искомой величины к виду рациональной дроби.

4. Определение оригинала  $x(t)$  по  $X(p)$ , т.е. обратный переход.

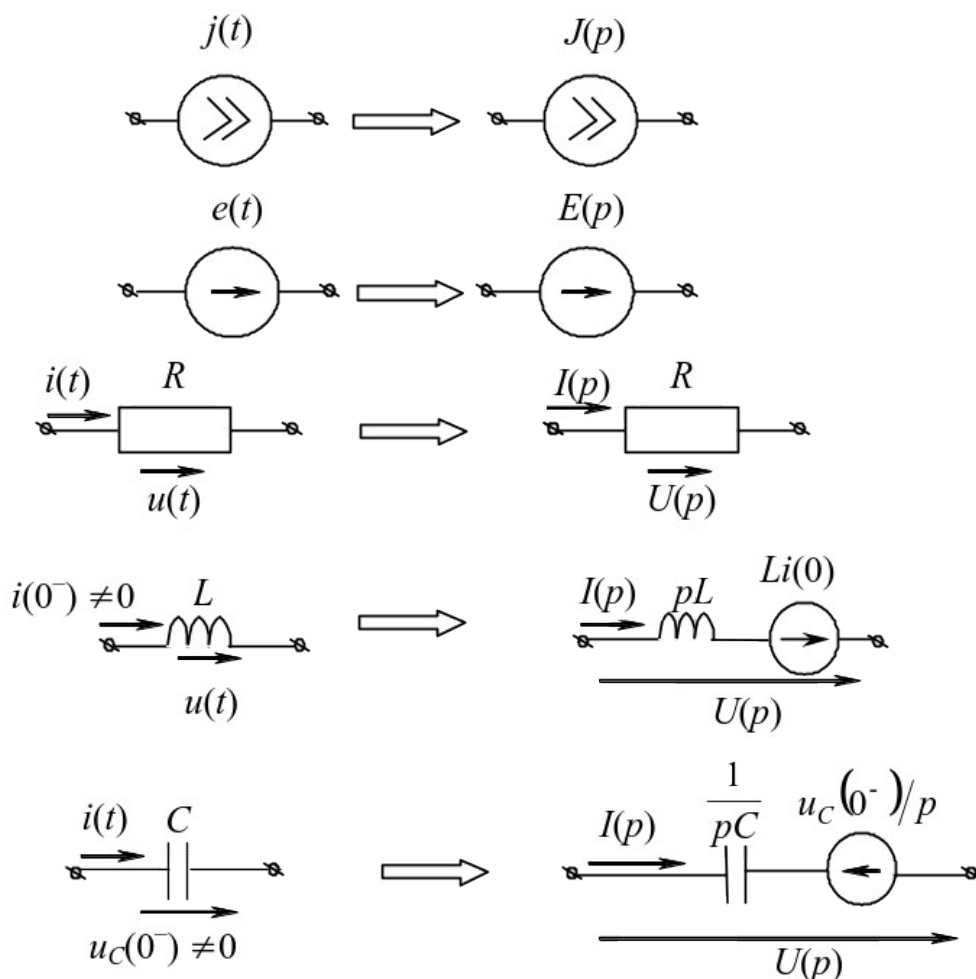


Рис. 2.2.

### Определение оригинала $x(t)$ по изображению $X(p)$

Оригинал можно определить описанными ниже способами.

#### 1. Использование обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (2.1)$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения относительно неизвестной функции  $f(t)$  и может быть получено методами теории функций комплексного переменного. Интеграл (2.1) вычисляется по прямой на плоскости комплексного переменного  $p$ , параллельной мнимой оси и расположенной правее всех особенностей (в частности, простых и кратных полюсов) функции  $F(p)$ . Такой способ в прикладных задачах электротехники не используется.

2. Табличный метод. Подробные таблицы оригиналов и соответствующих им изображений приводятся в математических и электротехнических справочниках. При использовании этого способа возникают трудности, связанные с распознаванием и сведением функций к табличному виду.

### 3. Использование теоремы о вычетах или теоремы разложения.

Для каждой функции времени, входящей в уравнение Кирхгофа, описывающего расчетную цепь, устанавливается в соответствие операторное изображение, после чего система линейных дифференциальных уравнений переписывается в виде системы алгебраических уравнений (также получаем операторную схему замещения). Система алгебраических уравнений рассчитывается относительно операторного изображения искомой величины, по которому с помощью теоремы разложения находится оригинал.

Теорема разложения имеет две модификации в зависимости от вида операторного изображения искомой величины:

$$1) \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{i=1}^n \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (2.2)$$

где  $n$  – порядок цепи,

$p_i$  – простые корни характеристического уравнения  $N(p) = 0$ ;

$$F_2'(p) = \frac{dF_2(p)}{dp}.$$

$$2) \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \doteq \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{F_1(p_i)}{p_i F_3'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (2.3)$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения  $F_3(p) = 0$ .

В этом случае знаменатель имеет один нулевой корень, на это указывает наличие в составе знаменателя множителя  $p$ . Теорема разложения в форме (2.3) соответствует сигналам, имеющим принужденную составляющую.

Если уравнение второго порядка, соответствующее цепи второго порядка,  $F_2(p) = 0$  имеет комплексные сопряженные корни  $p_i$  и  $p_i^*$ , то достаточно вычислить слагаемое сумм (2.2) или (2.3) только для корня  $p_i$ , а для сопряженного корня  $p_i^*$  взять значение, сопряженное этому слагаемому. Сумма, соответствующая этим двум слагаемым, равна удвоенному значению действительной части, найденной для одного из корней:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t} + \frac{F_1(p_i^*)}{F_2'(p_i^*)} e^{p_i^* t} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{F_1(p_i)}{F_2'(p_i)} e^{p_i t} \right] \quad (2.4)$$

или

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \doteq \frac{F_1(0)}{F_3'(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{F_1(p_i)}{p_i F_3'(p_i)} e^{p_i t} \right].$$

### 3. Пример расчета переходного процесса в цепи II порядка

Дана цепь (рис. 2.3) с параметрами  $E = 30$  В,  $J = 2$  А,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $C = 100$  мкФ,  $L = 50$  мГн.

Определить закон изменения тока  $i_1(t)$  после коммутации.

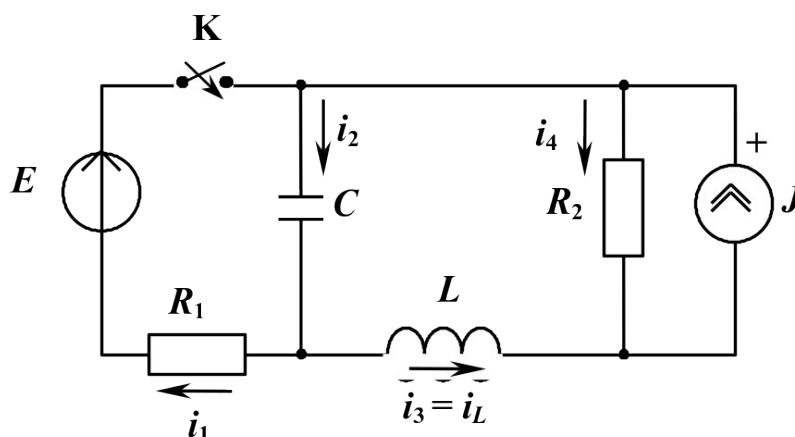


Рис. 2.3

#### 3.1. Классический метод расчета

##### 1. Правила коммутации:

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= i_L(0_+) = 0 \text{ А,} \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+) = J R_2 = 20 \text{ В.} \end{aligned}$$

##### 2. Составление характеристического уравнения цепи.

2.1. Совместное решение однородной системы дифференциальных уравнений. Составляем систему дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по законам Кирхгофа:

Из уравнения (2.12)

$$i_L = C u_C' - i_1.$$

Из уравнения (2.13) определим ток

$$i_1 = \frac{1}{R_1} E - \frac{1}{R_1} u_C \quad (2.17)$$

и подставим его в выражение для тока индуктивности



$$i_L = Cu'_C - \frac{1}{R_1}E - \frac{1}{R_1}u_C.$$

Определим производную тока индуктивности

$$i'_L = Cu''_C - \frac{1}{R_1}u'_C.$$

Из уравнения (2.11) определим ток  $i_4$

$$i_4 = i_1 - Cu'_C + J$$

и подставим в полученное уравнение (2.17)

$$i_4 = \frac{1}{R_1}E - \frac{1}{R_1}u_C - Cu'_C + J.$$

Все полученные выражения подставляем в уравнение (2.14)

$$\frac{R_2}{R_1}E - \frac{R_2}{R_1}u_C - R_2Cu'_C + R_2J - LCu''_C - \frac{L}{R_1}u'_C - u_C = 0.$$

После приведения подобных слагаемых и группирования получаем дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка

$$u''_C LC + u'_C \left[ \frac{L}{R_1} + CR_2 \right] + u_C \left[ 1 + \frac{R_2}{R_1} \right] = -JR_2 - E \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом методом исключения из системы дифференциальных уравнений для любой электрической цепи можно получить дифференциальное неоднородное уравнение.

Характеристическое уравнение получается из соответствующего однородного дифференциального уравнения в результате замены производных на соответствующие степени оператора  $p$  и имеет вид

$$p^2 + \frac{(L + CR_1R_2)}{R_1LC}p + \frac{R_1 + R_2}{LCR_1} = 0.$$

**2.2. Алгебраизация дифференциальных уравнений.** Для получения характеристических уравнений записывается система уравнений по методу контурных токов, которая впоследствии переписывается в алгебраической форме с помощью вспомогательного символа  $p$ , заменяющего операцию дифференцирования, и  $1/p$ , заменяющего операцию интегрирования:

$$\begin{cases} i_{11}(\frac{1}{pC} + R_1) - i_{22}\frac{1}{pC} + i_{33} \cdot 0 = E(p), \\ -i_{11}\frac{1}{pC} + i_{22}(R_2 + pL + \frac{1}{pC}) - i_{33}R_2 = 0, \\ i_{11} \cdot 0 - i_{22}R_2 + i_{33}R_2 = U_J(p). \end{cases}$$

Так как  $i_{33} = J$ , следовательно,

$$\begin{cases} i_{11}(\frac{1}{pC} + R_1) - i_{22}\frac{1}{pC} + U_J \cdot 0 = E(p), \\ -i_{11}\frac{1}{pC} + i_{22}(R_2 + pL + \frac{1}{pC}) + U_J \cdot 0 = JR_2, \\ i_{11} \cdot 0 - i_{22}R_2 + U_J \cdot 1 = -JR_2. \end{cases}$$

и, соответственно, для свободных составляющих токов:

$$\begin{cases} i_{12\text{св}}(pC + R_1) - i_{22\text{св}} \frac{1}{pC} + U_{12\text{св}} = 0, \\ -i_{12\text{св}} \frac{1}{pC} + i_{22\text{св}}(R_2 + pL + \frac{1}{pC}) + U_{12\text{св}} = 0, \\ i_{12\text{св}} = 0 = i_{22\text{св}}R_2 + U_{12\text{св}} = 1 = 0. \end{cases}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет решение, отличное от нулевого только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$D(p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{pC} + R_1 & -\frac{1}{pC} & 0 \\ -\frac{1}{pC} & R_2 + pL + \frac{1}{pC} & 0 \\ 0 & -R_2 & 1 \end{vmatrix}$$

или

$$\left(\frac{1}{pC}\right) \cdot \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right) - \left(\frac{1}{pC}\right)^2 = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение в результате преобразования принимает вид

$$p^2 + p \frac{L + R_1 R_2 C}{R_1 LC} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} = 0.$$

**2.3. Метод входного сопротивления.** Удалим источники из цепи в соответствии с известным правилом: источники ЭДС заменяются короткозамкнутыми участками, ветви с источниками тока размыкаются.

В произвольной ветви, разорвав цепь, запишем входное сопротивление:

$$\underline{Z}(j\omega) = R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C} [R_2 + j\omega L]}{\frac{1}{j\omega C} + R_2 + j\omega L}.$$

Заменяв  $j\omega$  на  $p$ , получим

$$Z(p) = R_1 + \frac{\frac{1}{pC} [R_2 + pL]}{\frac{1}{pC} + R_2 + pL}.$$

Приравняв данное выражение нулю ( $Z(p) = 0$ ) и произведя необходимые преобразования, получим характеристическое уравнение цепи

$$p^2 + p \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} = 0.$$

Подставим значения параметров цепи:

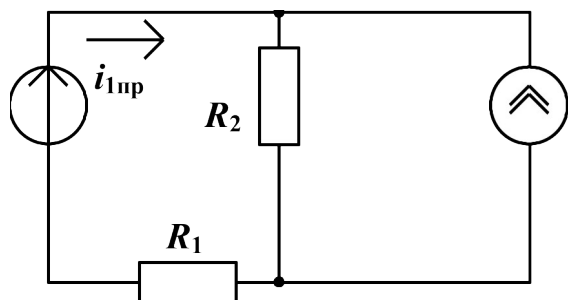
$$p^2 + 700p + 300000 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_1 = -350 + j421,308, \quad p_2 = -350 - j421,308$$

являются комплексными сопряженными, следовательно, переходный процесс в цепи имеет колебательный характер.

5. Определение принужденной составляющей. Рассматриваемая цепь в принужденном режиме имеет вид (рис. 2.4)



$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + R_2} - J \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$i_{1np} = 1/3 \text{ (A)}.$$

Рис. 2.4

4. Определение свободной составляющей. Для цепей, характеристические числа которых имеют комплексные сопряженные значения, свободная составляющая определяется в виде

$$i_{1св}(t) = e^{-\delta t}(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t),$$

где  $\delta$  – декремент затухания,  $\omega$  – частота свободных колебаний определяются через корни характеристического уравнения  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$ .

Таким образом, в выражении  $i_{1св}$  необходимо определить постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ . Вычисление их ведется с помощью системы уравнений, составленных для момента  $t = 0_+$ :

$$\begin{cases} i_1(0_+) = i_{1np} + A_1, \\ i_1'(0_+) = -\delta A_1 + \omega A_2. \end{cases}$$

4.1. Определение значений  $i_1(0_+)$  и  $i_1'(0_+)$  с использованием системы уравнений Кирхгофа. В данном случае составляется система уравнений Кирхгофа. Методом исключения выражается значение тока  $i_1(0_+)$  через известные значения  $u_C(0_+)$  и  $i_2(0_+)$ :

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{R_1} = 0,5 \text{ A}.$$

Дифференцируя выражение для  $i_1(t)$ , получим

$$i_1'(t) = -u_C'(t)/R_1, \quad \text{где } u_C'(t) = i_C(t)/C, \quad t = (0_+, +\infty).$$

Произведя необходимые преобразования и подстановки в системе уравнений Кирхгофа, получим

$$u'_C(t) = \frac{1}{C} \left[ \frac{E - u_C(t)}{R_1} + i_L(t) \right], \quad t = (0_+, +\infty).$$

Подставив соответствующие значения  $u_C$  и  $i_L$  в момент  $t = 0_+$ , рассчитаем

$$i'_1(0_+) = -250 \text{ A/c.}$$

4.2. Определение  $i_1(0_+)$  и  $i'_1(0_+)$  с использованием резистивных схем замещения в момент  $t = 0_+$ . Схема замещения в  $0_+$  для величин токов и напряжений изображена на рис. 2.5

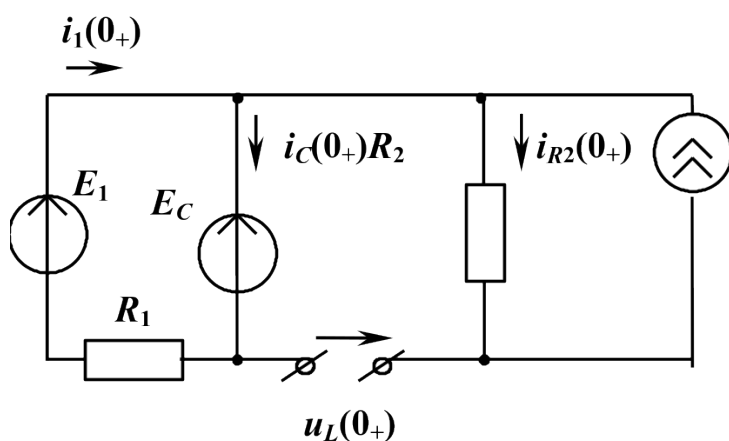


Рис. 2.5

$$E_C = u_C(0_-)$$

$$J = i_L(0_-)$$

J

По II закону Кирхгофа получим

$$i_1(0_+) = \frac{E_1 - u_C(0_-)}{R_1}, \quad i_1(0_+) = 0,5 \text{ A.}$$

Для построения схемы замещения в  $(0_+)$  для производных токов и напряжений необходимо определить начальные значения:

$$u'_C(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C}, \quad i'_L(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L}.$$

Таким образом, следует определить  $i_C(0_+)$  и  $u_L(0_+)$  с помощью уже полученной схемы замещения:

а) для определения  $u_L(0_+)$  составим уравнение по II закону Кирхгофа:

$$u_L(0_+) - i_{R2}(0_+)R_2 = -u_C(0_+)$$

подставив значения, получим  $u_L(0_+) = 0$ , следовательно,  $i'_L(0_+) = 0$ .

б)  $i_C(0_+) = i_1(0_+) = 0,5 \text{ А}$ , следовательно,  $u'_C(0_+) = 5000 \text{ В/с}$ .

При построении схемы замещения в  $0_+$  для производных следует:

- источники заменить на аналогичные источники с ЭДС или задающим током, равным соответственно производной от данных в задании;

- номиналы резисторов остаются неизменными;
- емкости и индуктивности же замещаются в соответствии со следующим правилом – емкости с нулевыми начальными условиями ( $u'_C(0_+) = 0$ ) заменяются короткозамкнутыми участками, с ненулевыми начальными условиями ( $u'_C(0_+) \neq 0$ ) – противодействующими источниками ЭДС с  $E_C = u'_C(0_+)$ ;

- ветви с индуктивностями, имеющими нулевые начальные условия ( $i'_L(0_+) = 0$ ) размыкаются, в случае ненулевых начальных условий ( $i'_L(0_+) \neq 0$ ) индуктивности заменяют на содействующие источники тока с  $J_L = i'_L(0_+)$ .

Таким образом, осуществляется операция дифференцирования, адекватная дифференцированию системы уравнений Кирхгофа.

В нашем случае, когда в цепи действуют источники постоянных воздействий, источники ЭДС заменяются короткозамкнутыми участками (т.к.  $E' = 0$ ), а ветви с источниками тока размыкаются (т.к.  $J' = 0$ ).

Таким образом, схема замещения в  $t = 0_+$  для производных имеет вид (рис. 2.6). Определим  $i'_1(0_+) = -u'_C(0_+)/R_1$ ,  $i'_1(0_+) = -250 \text{ А/с}$ .

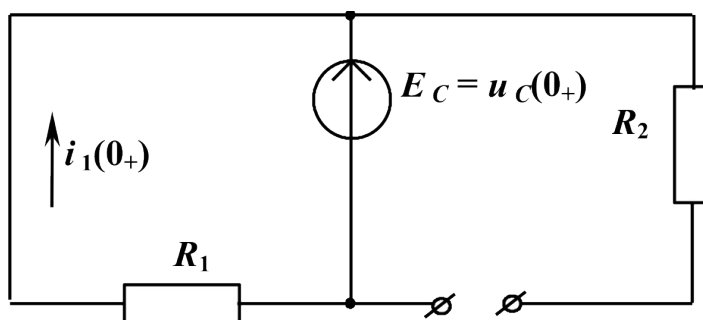


Рис. 2.6

### 4.3. Определение постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} 1/3 + A_1 = 0,5, \\ 421,308A_2 - 350A_1 = -250. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим

$$A_1 = 0,1667, \quad A_2 = -0,455.$$

5. Определение полного решения. Полное решение следует искать в виде

$$i_1(t) = i_{\text{нпр}} + i_{\text{св.}}$$

С учетом произведенных расчетов получим

$$i_1(t) = \frac{1}{3} + e^{-350t} [0,167 \cos 421,308 t - 0,455 \sin 421,308 t].$$

Для удобства построения графика преобразуем полученное выражение в синусоидальную форму:

$$i_1(t) = 1/3 + e^{-350t} \sqrt{0,455^2 + 0,167^2} \sin(421,308t + \arctg(0,167/-0,455) \pm \pi),$$

( $\pm \pi$ ) прибавляется к аргументу, так как угол  $\psi$  имеет отрицательный знак

$$\cos \psi = \frac{-0,455}{\sqrt{0,455^2 + 0,167^2}} \text{ и положительный знак } \sin \psi = \frac{0,167}{\sqrt{0,455^2 + 0,167^2}},$$

т.е. если рассматривать единичную окружность, данный угол находится во II четверти координатной плоскости.

Угол  $\psi$  определяется в радианах, так как свободная частота измеряется в рад/с. Таким образом, *искомый ток*

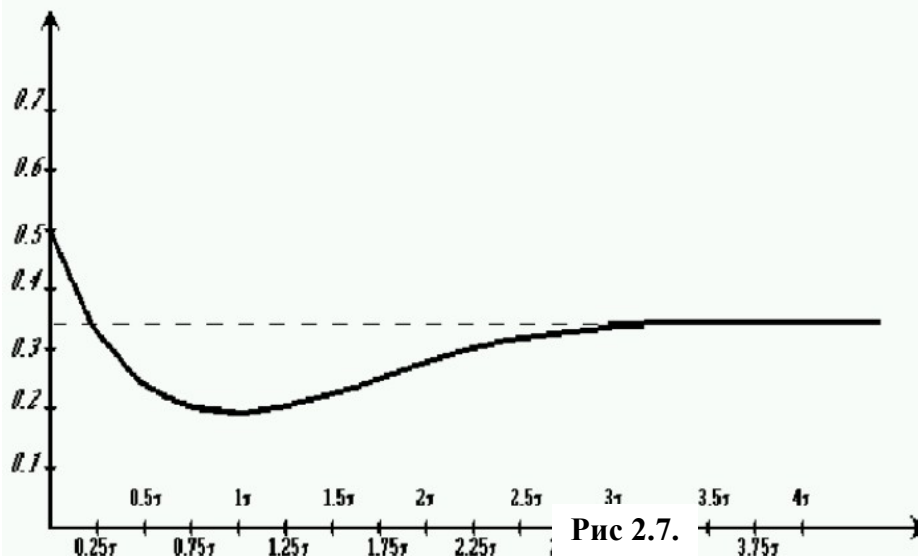
$$i_1(t) = 1/3 + e^{-350t} 0,485 \sin(421,308t + 2,788).$$

6. Построение графика изменения тока  $i(t)$ . Оценим соотношение между постоянной времени экспоненты и периодом синусоиды. Постоянная времени экспоненты  $\tau_{\text{exp}} = 1/\delta = 0,00286$  с. Период синусоиды  $T_{\text{sin}} = 1/f = 2\pi/\omega = 0,0149$  с. В связи с тем, что  $\tau_{\text{exp}} \ll T_{\text{sin}}$ , график строится по точкам. Результаты расчетов значений тока  $i_1(t)$  записаны в табл. 2.2., а график изменения  $i_1(t)$  изображен на рис. 2.7.

Таблица 2.2

$t$	$i_1(t)$	$t$	$i_1(t)$	$t$	$i_1(t)$
0	0,5	2 $\tau$	0,2754	4 $\tau$	0,3419
0,25 $\tau$	0,3531	2,25 $\tau$	0,2973	4,25 $\tau$	0,3402
0,5 $\tau$	0,2609	2,5 $\tau$	0,3149	4,5 $\tau$	0,3384
0,75 $\tau$	0,2137	2,75 $\tau$	0,3278	4,75 $\tau$	0,3366
1 $\tau$	0,1993	3 $\tau$	0,3362	5 $\tau$	0,3352
1,25 $\tau$	0,2065	3,25 $\tau$	0,3410	5,25 $\tau$	0,3341
1,5 $\tau$	0,2260	3,5 $\tau$	0,3430	5,5 $\tau$	0,3333

$t$	$i_1(t)$	$t$	$i_1(t)$	$t$	$i_1(t)$
$1,75\tau$	$0,2506$	$3,75\tau$	$0,3430$		



б

### 3.2. Операторный метод

С учетом независимых начальных условий изображается операторная схема замещения (рис. 2.8).

Уравнения Кирхгофа в операторной форме запишутся в виде

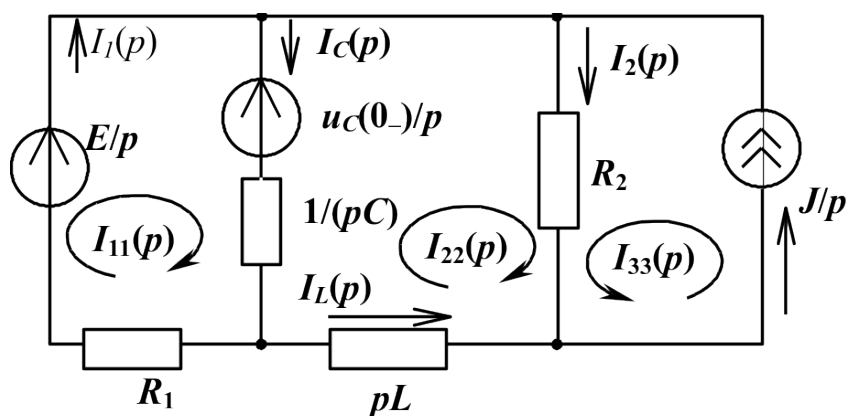


Рис. 2.8

Решение получается проще при использовании метода контурных токов. Контурные токи выберем так, как показано на рис. 2.8.

Ток  $I_{33}(p) = \frac{J}{p}$ , тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_{11}(p)Z_{11} + I_{22}(p)Z_{12} + \frac{J}{p}Z_{13} = E_{11}(p), \\ I_{11}(p)Z_{21} + I_{22}(p)Z_{22} + \frac{J}{p}Z_{23} = E_{22}(p). \end{cases}$$

Определим собственные и общие сопротивления, а также контурные ЭДС, полученные выражения подставим в систему уравнений:

$$\begin{cases} I_{11}(p)\left(R_1 + \frac{1}{pC}\right) - I_{22}(p)\frac{1}{pC} + \frac{J}{p} \cdot 0 = \frac{E}{p} - \frac{u_C(0_-)}{p}, \\ -I_{11}(p)\frac{1}{pC} + I_{22}(p)\left(R_2 + \frac{1}{pC} + pL\right) + \frac{J}{p}R_2 = \frac{u_C(0_-)}{p}. \end{cases}$$

После преобразований

$$\begin{cases} I_{11}(p)\left(R_1 + \frac{1}{pC}\right) - I_{22}(p)\frac{1}{pC} = \frac{E}{p} - \frac{u_C(0_-)}{p}, \\ -I_{11}(p)\frac{1}{pC} + I_{22}(p)\left(R_2 + \frac{1}{pC} + pL\right) = -\frac{J}{p}R_2 + \frac{u_C(0_-)}{p}. \end{cases}$$

Подставим значения

$$\begin{cases} I_{11}(p)\left(20 + \frac{1}{10^{-4}p}\right) - I_{22}(p)\frac{1}{10^{-4}p} = \frac{30}{p} - \frac{20}{p}, \\ -I_{11}(p)\frac{1}{10^{-4}p} + I_{22}(p)\left(10 + \frac{1}{10^{-4}p} + 50 \cdot 10^{-3}p\right) = -\frac{10 \cdot 2}{p} + \frac{20}{p}. \end{cases}$$

Решим систему уравнений при помощи метода определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + \frac{10^3}{p} & -\frac{10^3}{p} \\ -\frac{10^4}{p} & 10 + \frac{10^4}{p} + 0,05p \end{vmatrix} = \frac{0,1p^2 + 70p + 3 \cdot 10^4}{p},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{10^3}{p} \\ 0 & 10 + \frac{10^4}{p} + 0,05p \end{vmatrix} = \frac{0,05p^2 + 10p + 1 \cdot 10^4}{p^2}.$$

Изображение тока в первой ветви определится

$$I_1(p) = I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0,05p^2 + 10p + 1 \cdot 10^4}{p(0,1p^2 + 70p + 3 \cdot 10^4)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Определим оригинал искомого тока с помощью теоремы разложения. Многочлен второй степени знаменателя приравняем нулю и получим характеристическое уравнение цепи  $F_3(p) = 0,1p^2 + 70p + 3 \cdot 10^4 = 0$ , решением которого являются комплексные сопряженные корни

$$p_{1,2} = -350 \pm j421,31,$$

которые совпадают с полученными при решении классическим методом.

Оригинал тока определяем по формуле (2.4). Вычислим производную  $F_3'(p)$  и значение производной, а также значение многочлена  $F_1(p)$  при корне  $p_1 = -350 + j421,31$ , подставим в (2.4):

$$F_3'(p) = 0,2p + 70, \quad F_3'(p_1) = 0,2(-350 + j421,31) + 70 = j84,262;$$

$$F_1(p_1) = 1 \cdot 10^4 + 10(-350 + j421,31) + 0,05(-350 + j421,31)^2 = \\ = 3749,894 - j10532,75;$$



$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{1 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^4} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{3749,894 - j10532,75}{-35500,42 - j29491,7} e^{-350t} e^{j421,31t} \right] = \\
&= \frac{1}{3} + 2e^{-350t} \operatorname{Re} \left[ \frac{11180,36e^{-j70,4}}{46152,36e^{-j140,28}} e^{j421,31t} \right] = \frac{1}{3} + 2 \cdot 0,242e^{-350t} \operatorname{Re} \left[ e^{j69,88} e^{j421,31t} \right] = \text{Данное} \\
&= \frac{1}{3} + 0,484e^{-350t} \cos(421,31t + 69,88^\circ) = \frac{1}{3} + 0,484e^{-350t} \sin(421,31t + 159,88^\circ) = \\
&= \frac{1}{3} + 0,484e^{-350t} \sin(421,31t + 2,79).
\end{aligned}$$

**решение совпадает с решением, полученным классическим методом.**